

उत्तरमध्यमा प्रथमखण्ड

विषय कोड : 732

गणित

अष्टम् ऐच्छिक प्रश्नपत्रम्

समय : 3 घण्टे

पूर्णांक : 100

निर्देश : (i) सभी प्रश्न हल करना है।

(ii) प्रश्नों पर आवंटित अंक उनके सम्मुख दिये गये हैं।

1. सही विकल्प चुनकर लिखिए :

5×1=5

(i) यदि दो पदों का $HM = 36$ तथा $AM = 9$ हो, तो गुणोत्तर माध्य (GM) होगा :

(a) 20

(b) 18

(c) 16

(d) 12

(ii) यदि AP का प्रथम पद $a = 2$, वर्गान्तर $d = 4$ हो, तो उसके 40 पदों का योग होगा :

(a) 100

(b) 400

(c) 1600

(d) 3200

(iii) वर्ग आव्यूह A समशम आव्यूह कहलाता है यदि :

(a) $A' = A$ (b) $A^2 = A$ (c) $AA' = I'$ (d) $A^2 = I$

(iv) अतिपरवलय की उत्केन्द्रता का मान :

- (a) एक से अधिक (b) एक
(c) एक से कम (d) शून्य

(v) $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$ का मान :

- (a) e^{e^x} (b) e^x
(c) $\log_e x$ (d) $\log_e e^x$

2. निम्नलिखित कथनों में सत्य/असत्य लिखिए :

5×1=5

(i) श्रेणी $1 + \log_e x + \frac{(\log_e x)^2}{2} + \frac{(\log_e x)^3}{3} + \dots \infty$ का योग n है।

(ii) एक निश्चित क्रम में विशिष्ट चरणों में सम्पादित प्रक्रिया प्रोग्रामिंग कहलाती है।

(iii) असमीकरण $6x - 30 \geq 0$ का हल $x \leq 5$ होगा।

(iv) ${}^n C_r \neq {}^n C_{n-r}$

(v) यदि वामावर्त एवं दक्षिणावर्त में अन्तर हो, तो n अवयवों के वृत्तीय क्रमचयों की संख्या = $|n - 1|$ होती है।

3. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

5×1=5

(i) $(1 - x)^{10}$ के प्रसार में मध्य पद का मान होगा।

(ii) e^{-3x} के प्रसार में तृतीय पद होगा।

(iii) दो रेखाओं $y = m_1x + c_1$ एवं $y = m_2x + c_2$ के समान्तर होने पर प्रतिबन्ध होता है।

(iv) असमिका $x \geq 2$ और $y \geq 2$ की ग्राफ में स्थिति होगी।

(v) असमिका $7x - 2 < 5x + 4$ का हल है जहाँ x एक वास्तविक संख्या है।

235

4. निम्नांकित का उत्तर एक शब्द/वाक्य में लिखिए :

5×1=5

- (i) $(1 - x)^{-3/2}$ के प्रसार में दूसरे पद का मान क्या है ?
- (ii) बिन्दु $3, 3\sqrt{3}$ की मूल बिन्दुओं से दूरी क्या होगी ?
- (iii) किसी बाह्य बिन्दु (x_1, y_1) से वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ पर खींची गई स्पर्शिकाओं की सम्पर्क जीवा का समीकरण लिखिए।
- (iv) उद्देश्य फलन $P = 5x + 3y$ है, सम्भाव्य क्षेत्र के निर्देशांक $(3, 0), (12, 0), (0, 6)$ हैं, उद्देश्य फलन का निम्नतम मान बताइए।
- (v) $\log_e \left(\frac{6}{5} \right)$ के प्रसार के प्रथम दो पद लिखिए।

5. सही जोड़ियाँ बनाइए :

5×1=5

'A'

'B'

(i) यदि बिन्दु $(3, 0), (6, 9)$ एवं $(x, 3)$

(a) $-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots$

सरेख है तो x का मान होगा

(ii) बिन्दु $(3, 5)$ तथा $(-4, 2)$ को मिलाने

(b) $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$

वाली रेखा की प्रवणता होगी

(iii) उस रेखायुग्म का समीकरण जो मूल

(c) $\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}$

बिन्दु से होकर जाता है

(iv) $\cot \frac{c}{2}$

(d) 4

(v) $\log_e (1 - x)$

(e) $-7/3$

6. वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ के सापेक्ष बिन्दु $(1, 3)$ की स्थिति ज्ञात कीजिए। 2

अथवा

वृत्त $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 23 = 0$ पर बाह्य बिन्दु $(8, -3)$ से खींची गई स्पर्शरेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।

7. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 36 = 0$ की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। 2

अथवा

उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र $(2, -1)$ पर हो तथा जो रेखा $3x + 4y = 12$ को स्पर्श करता है।

8. अंकों 1, 2, 3, 4, 5 और 6 से 3000 और 4000 के बीच कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं जो 5 से विभाजित हो सकती हैं। अंकों की पुनरावृत्ति न हो। 2

अथवा

LAHORE के अक्षरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं यदि सभी अक्षर एक साथ लिए जाएँ।

9. यदि ${}^n P_4 = 20 {}^n P_3$ हो, तो n ज्ञात कीजिए। 2

अथवा

सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{{}^n C_r}{{}^n C_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}$$

10. $(2x + 3y)^4$ का विस्तार कीजिए। 2

अथवा

$\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^{10}$ के प्रसार में 6वाँ पद ज्ञात कीजिए।

11. उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जिसकी बिन्दु (2, 3) से दूरी सदैव 5 इकाई है। 3

अथवा

सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ $5x - 9y + 4 = 0$, $9x - 4y - 5 = 0$ तथा $4x + 5y - 9 = 0$ संगामी हैं।

12. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो $4x - 3y + 7 = 0$ पर लम्ब है तथा उसके द्वारा अक्षों पर काटे गये अन्तःखण्डों का योग -7 है। 3

अथवा

रेखाओं $4x^2 - 16xy + 7y^2 = 0$ के बीच के कोणों के अर्द्धकोणों का समीकरण ज्ञात कीजिए।

13. सिद्ध कीजिए कि : 3

$$\frac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1} = \frac{1 + \sin A}{\cos A}$$

अथवा

सिद्ध कीजिए कि :

$$\cot 10^\circ \cdot \cot 20^\circ \cdot \cot 60^\circ \cdot \cot 70^\circ \cdot \cot 80^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

14. यदि $A + B + C = \pi$ हो, तो सिद्ध कीजिए : 3

$$\sin 2A - \sin 2B - \sin 2C = 4 \sin A \cos B \cos C.$$

अथवा

यदि $A + B + C = \pi$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि : 3

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C.$$

15. $\frac{3}{7}$ और $\frac{1}{4}$ के बीच चार हरात्मक माध्य ज्ञात कीजिए। 4

अथवा

तीन समान्तर श्रेणियों के n पदों का योगफल s_1, s_2, s_3 है, प्रत्येक श्रेणी का प्रथम पद 1 तथा उनके सार्वान्तर 1, 2, 3 है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$s_1 + s_3 = 2s_2.$$

16. $5 + 55 + 555 + \dots n$ पदों का योगफल ज्ञात कीजिए। 4

अथवा

किसी गुणोत्तर श्रेणी के 6 पदों का योगफल उनके प्रथम 3 पदों के योगफल का 9 गुना है, उसका सार्वानुपात ज्ञात कीजिए।

17. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो दर्शाइए कि $(AB)' = B' \cdot A'$ । 4

अथवा

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो A का सहखण्डज (adj A) ज्ञात कीजिए।

18. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (3, 4) से होकर जाती है तथा दोनों अक्षों से ऐसे अन्तःखण्ड काटती है जिनकी लम्बाइयों का योग 14 है। 4

अथवा

रेखाओं $4x^2 - 16xy + 7y^2 = 0$ के बीच के कोणों के अर्द्धकोणों का समीकरण ज्ञात कीजिए।

19. उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए कि जिसकी नाभियाँ (2, 0) और (-2, 0) एवं उत्केन्द्रता $\frac{3}{2}$ है। 4

अथवा

परवलय $x^2 + 4x + 4y + 16 = 0$ का शीर्ष, फोकस अक्ष, नियता तथा शीर्ष पर स्पर्शरेखा ज्ञात कीजिए।

20. सिद्ध कीजिए कि : 4

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$$

अथवा

सिद्ध कीजिए कि $m^2 - n^2 = 4\sqrt{m \cdot n}$ यदि :

$$\tan \theta + \sin \theta = m \text{ एवं } \tan \theta - \sin \theta = n.$$

21. सिद्ध कीजिए कि : 4

$$a \sin (B - C) + b \sin (C - A) + c \sin (A - B) = 0.$$

अथवा

ΔABC में सिद्ध कीजिए :

$$\cos c = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

22. सम्मिश्र संख्या $(5 + 12i)$ का वर्गमूल ज्ञात कीजिए। 5

अथवा

यदि $x = (a + b)$, $y = (aw + bw^2)$ एवं $z = (aw^2 + bw)$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $x \cdot y \cdot z = a^3 + b^3$ ।

23. a के किस मान के लिए समीकरण :

5

$$x^2 - (3a - 1)x + 2a^2 + 2a - 11 = 0$$

के मूल समान होंगे।

अथवा

समीकरण हल कीजिए :

$$xy + yz = 9, yz + zx = 14, zx + xy = 11.$$

24. सिद्ध कीजिए कि सारणिक $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix}$ एक पूर्ण वर्ग है।

5

अथवा

सिद्ध कीजिए कि :

$$\begin{vmatrix} b^2 + c^2 & ab & ac \\ ab & c^2 + a^2 & bc \\ ac & bc & a^2 + b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2.$$

25. किसी पहाड़ के चरण से उसके शिखर का उन्नयन कोण 45° है। 30° के ढाल पर 1000 मी. ऊपर चढ़ने पर शिखर का उन्नयन कोण 60° हो जाता है। पहाड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

5

अथवा

एक स्तम्भ उत्तर की ओर झुका हुआ है, इसके ठीक दक्षिण में दो स्टेशन हैं। इनकी स्तम्भ से दूरियाँ क्रमशः a एवं b हैं, स्टेशनों से स्तम्भ की चोटी के उन्नयन कोण क्रमशः α व β हैं। यदि स्तम्भ का क्षैतिज से झुकाव θ है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\cot \theta = \frac{b \cot \alpha - a \cot \beta}{b - a}.$$

26. निम्नलिखित सारणी से समान्तर माध्य से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

5

वर्ग	बारम्बारता
0—10	10
10—20	25
20—30	30
30—40	20
40—50	15

अथवा

निम्नलिखित आँकड़ों के लिए मानक विचलन एवं विचरण गुणांक ज्ञात कीजिए :

x	f
10	3
12	5
14	9
16	16
18	8
20	7
22	2

