

Roll No.....

Total No. of Pages : 8+3

105 2021-22

Total No. of Questions : 24

उत्तरमध्यमा द्वितीयखण्ड

विषय कोड : 832

गणितम्

अष्टम् ऐच्छिक प्रश्नपत्रम्

समय : 3 घण्टे

पूर्णांक : 100

- निर्देश : (1) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
(2) प्रश्न क्रमांक 1 से 5 तक वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न पर 5 अंक आबंटित हैं।
(3) प्रश्न क्रमांक 6 से 10 तक, प्रत्येक प्रश्न पर 2 अंक आबंटित हैं।
(4) प्रश्न क्रमांक 11 से 17 तक, प्रत्येक प्रश्न पर 4 अंक आबंटित हैं।
(5) प्रश्न क्रमांक 18 से 22 तक, प्रत्येक प्रश्न पर 5 अंक आबंटित हैं।
(6) प्रश्न क्रमांक 23 एवं 24 प्रत्येक प्रश्न पर 6 अंक आबंटित हैं।
(7) प्रश्न क्रमांक 6 से 24 में प्रत्येक प्रश्न में आन्तरिक विकल्प दिए गए हैं।

1. सही विकल्प चुनकर लिखिए :

(i) $\frac{1}{x^2-1}$ की आंशिक भिन्न होगी :

(a) $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right]$

(b) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$

(c) $\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1}$

(d) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$

(ii) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ का मान होगा :

(a) $\frac{\pi}{4}$

(b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{\pi}{3}$

(d) π

(iii) बिन्दु (x, y, z) की xy समतल से लम्बवत् दूरी होगी :

(a) y

(b) z

(c) x

(d) $\sqrt{x^2 + y^2}$

(iv) यदि एक रेखा के अक्षों पर प्रक्षेप 2, -1, 2 हो तो रेखा की लम्बाई होगी :

(a) 3

(b) 4

(c) 2

(d) $\frac{1}{2}$

(v) गोले $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ का केन्द्र होगा :

(a) (1, 0, 1)

(b) (0, 0, 1)

(c) (0, 0, 0)

(d) (0, 1, 0)

2. निम्नलिखित कथनों में सत्य/असत्य बताइए :

- (i) एक त्रिभुज की भुजाओं द्वारा क्रमानुसार निरूपित सदिशों का योग शून्य होता है। 1
- (ii) सदिश \vec{a} की दिशा में एकांक सदिश $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ होगा। 1
- (iii) वह सदिश जिसका मापांक शून्य होता है, शून्य सदिश कहलाता है। 1
- (iv) सहसंबंध गुणांक का मान सदैव धनात्मक होता है। 1
- (v) समतल का व्यापक समीकरण $ax + by + cz + d = 0$ है। 1

3. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

- (i) $\sin x$ का अवकल गुणांक होगा। 1
- (ii) e^x का x के सापेक्ष अवकल गुणांक होगा। 1
- (iii) किसी भी कण की अधिकतम ऊँचाई पर वेग सदैव होता है। 1
- (iv) $\int \sec^2 x dx$ का मान है। 1
- (v) यदि समाश्रयण गुणांक 0.8 तथा 0.2 हो, तो सहसम्बन्ध गुणांक का मान है। 1

4. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर एक शब्द/वाक्य में दीजिए :

- (i) सिम्पसन का नियम किस सिद्धांत पर आधारित है ? 1

- (ii) आंकिक विधियों में समलम्ब चतुर्भुज का नियम हेतु सूत्र लिखिए।
- (iii) समीकरण $x^4 - x - 10 = 0$ का मूल किस अंतराल में स्थित है ?
- (iv) सिम्पसन नियम में सम-संलग्न वाले y का गुणांक लिखिए।
- (v) सिम्पसन के एक-तिहाई नियम का सूत्र लिखिए।

5. सही जोड़ियाँ बनाइए :

स्तंभ 'अ'	स्तंभ 'ब'	
(i) $\int \tan x \, dx$	(a) $\frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{x}{a}$	1
(ii) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	(b) $\log(x + \sqrt{x^2 + a^2})$	1
(iii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$	(c) $\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$	1
(iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	(d) $\sin^{-1} \frac{x}{a}$	1
(v) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	(e) $\log \sec x$	1

6. सिद्ध कीजिए कि $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $4\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$ परस्पर लम्बवत् सदिश हैं। 2

अथवा

ΔABC में BC का मध्य बिन्दु D है, तो सिद्ध कीजिए कि $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AD}$ ।

7. सदिश :

$$\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k} \text{ तथा } \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

का सदिश गुणनफल ज्ञात कीजिए।

2

अथवा

सदिश :

$$3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k} \text{ तथा } \hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$$

के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

8. उस गोले का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र (2, -3, 4) तथा त्रिज्या 5 है।

2

अथवा

यदि A और B के स्थिति सदिश क्रमशः

$$7\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k} \text{ तथा } 2\hat{i} - 5\hat{j} + 4\hat{k}$$

हैं, तो \vec{AB} ज्ञात कीजिए।

9. $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

2

अथवा

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx \text{ का मान ज्ञात कीजिए।}$$

10. $\int x e^x dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

2

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \log x dx$$

11. $\frac{1}{(x+4)(x+6)}$ को आंशिक भिन्नो में विभक्त कीजिए।

4

अथवा

$\frac{5x-11}{2x^2+x-6}$ को आंशिक भिन्नो में विभक्त कीजिए।

12. सिद्ध कीजिए कि :

4

$$\sin^{-1} \frac{3}{5} + \sin^{-1} \frac{8}{17} = \sin^{-1} \frac{77}{85}$$

अथवा

यदि

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \frac{\pi}{2}$$

हो तो सिद्ध कीजिए कि :

$$xy + yz + zx = 1$$

13. यदि $y = 2\sin x - 3\cos x$ हो तो सिद्ध कीजिए कि :

4

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

अथवा

यदि $x = a\sec\theta$ तथा $y = b\tan\theta$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

14. $\sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$ का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए।

4

अथवा

$\frac{1 + \log x}{1 - \log x}$ का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए।

15. एक वृत्त की त्रिज्या 2 cm/sec की एकसमान दर से बढ़ रही है। क्षेत्रफल में वृद्धि किस दर से होगी, जबकि त्रिज्या 10 cm हो।

4

अथवा

दो धनात्मक संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका गुणनफल 64 है तथा योग न्यूनतम है।

16. X व Y के मानों के निम्नांकित मूल्यों के लिए सहप्रसरण ज्ञात कीजिए :

4

(1, 10), (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6),

(6, 5), (7, 4), (8, 3), (9, 2), (10, 1).

अथवा

निम्नांकित आँकड़ों के लिए x तथा y में सहसम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए :

x	y
5	12
9	20
13	25
17	33
21	35

17. सिद्ध कीजिए कि सहसम्बन्ध गुणांक समाश्रयण गुणांकों का गुणोत्तर माध्य होता है।

4

अथवा

यदि समाश्रयण रेखाएँ क्रमशः

$$2x - 9y + 6 = 0 \text{ तथा } x - 2y + 1 = 0$$

हो तो सहसम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए।

18. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके निर्देशांक अक्षों पर अन्तःखण्ड $-4, 2$ तथा 3 हों।

5

अथवा

तीन बिन्दुओं

$$(1, 1, 0), (-2, 2, -1) \text{ तथा } (1, 2, 1)$$

से होकर गुजरने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

19. मान ज्ञात कीजिए :

5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x}$$

अथवा

यदि

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ और } \phi(x) = x,$$

तो सिद्ध कीजिए कि :

$$f\{\phi(x)\} = \phi\{f(x)\}$$

20. मान ज्ञात कीजिए :

5

$$\int \frac{d\theta}{4+5\cos\theta}$$

अथवा

सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot x}}{\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}} dx = \frac{\pi}{4}$$

21. अवकल समीकरण हल कीजिए :

5

$$(e^x + e^{-x}) \frac{dy}{dx} = e^x - e^{-x}$$

अथवा

अवकल समीकरण हल कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} + y \sec x = \tan x$$

22. 1 से 12 तक अंकित टिकटों को मिला दिया गया और एक टिकट यदृच्छया निकाली गई। उस पर लिखी गई संख्या 2 या 3 के गुणन होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 5

अथवा

एक डिब्बे में 10 अच्छी तथा 6 खराब वस्तुएँ हैं। एक वस्तु का यादृच्छिक चयन किया जाता है। इसके अच्छे या खराब होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

23. एक गोले का समीकरण :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 2y + 2z - 15 = 0$$

है। इसके एक व्यास AB के सिरे A के निर्देशांक $(-1, 4, -3)$ हैं। B सिरे के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

6

अथवा

सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \text{ और } \frac{x-4}{5} = \frac{y-1}{2} = z$$

परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं।

24. सदिश विधि से सिद्ध कीजिए कि :

6

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

अथवा

यदि

$$\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k} \quad \text{और}$$

$$\vec{c} = 2\hat{i} - 3\hat{j} \quad \text{हो तो}$$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ का मान ज्ञात कीजिए।