

उत्तरमध्यमा द्वितीयखण्ड

विषय कोड : 832

गणित

अष्टम् ऐच्छिक प्रश्नपत्रम्

समय : 3 घण्टे

पूर्णांक : 100

निर्देश : (i) सभी प्रश्न हल करने हैं।

(ii) प्रश्नों पर आवंटित अंक उनके सम्मुख दिये गये हैं।

1. सही विकल्प चुनकर लिखिए :

5×1=5

(i) व्यंजक  $\left(\frac{1}{x(x+a)}\right)$  की आंशिक भिन्न हैं :

(a)  $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a}$

(b)  $\frac{1}{a} \left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} \right]$

(c)  $\frac{1}{a} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{x+a} \right]$

(d)  $\left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} \right]$

(ii)  $\sin^{-1} \left[ \sin \frac{2\pi}{3} \right]$  का मुख्य मान है :

(a)  $\frac{\pi}{3}$

(b)  $\frac{2\pi}{3}$

(c)  $\frac{\pi}{6}$

(d)  $\frac{\pi}{4}$



(iii) सदिश  $4\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$  की दिशा में सदिश  $\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$  का प्रक्षेप होगा :

(a)  $\frac{5\sqrt{6}}{10}$

(b)  $\frac{9}{10}$

(c)  $\frac{19}{9}$

(d)  $\frac{\sqrt{6}}{19}$

(iv) विस्थापन  $s$  व समय  $t$  निम्नांकित सूत्रों से सम्बद्ध है, दिये गये समय पर त्वरण होता है  $s = \log t$ ,  $t = 3$  सेकण्ड :

(a)  $-\frac{1}{9}$  सेमी/सेकण्ड<sup>2</sup>

(b)  $\frac{1}{9}$  सेमी/सेकण्ड<sup>2</sup>

(c)  $\frac{1}{3}$  सेमी/सेकण्ड<sup>2</sup>

(d)  $-\frac{1}{3}$  सेमी/सेकण्ड<sup>2</sup>

(v)  $\int e^x \cos e^x dx$  का मान होगा :

(a)  $\cos e^x$

(b)  $\sin e^x$

(c)  $-\cos e^x$

(d)  $-\sin e^x$

2. निम्न का एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए :

5×1=5

(i)  $z$ -अक्ष के समान्तर समतल का समीकरण क्या होगा ?

(ii) गोले  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z - 7 = 0$  की त्रिज्या क्या होगी ?

(iii) सदिश  $\vec{a}$  की दिशा में एकांक सदिश है।

(iv) यदि दो सदिश  $\vec{a}$  और  $\vec{b}$  लम्बवत् हैं, तब  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  का मान क्या होगा ?

(v)  $\sin x^3$  का  $x^3$  के सापेक्ष अवकल गुणांक क्या होगा ?

3. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

5×1=5

(i) आंकिक विधियों में समलम्ब चतुर्भुज नियम का सूत्र ..... है।

(ii) आभासी स्थिति विधि ..... है।

(iii) सिम्पसन नियम से आंकिक प्रश्न हल करने का सूत्र ..... है।

(iv) न्यूटन-राफसन विधि से 10 का घनमूल प्रथम पुनरावृत्ति पश्चात् ..... होगा।



(v) यदि  $e^0 = 1$ ,  $e^1 = 2.72$ ,  $e^2 = 7.39$  तो समलम्ब चतुर्भुज नियम से  $\int_0^3 e^x dx$  ..... है।

4. निम्न कथनों में सत्य/असत्य बताइए : 5×1=5

- (i) सहसंबंध गुणांक का मान 1 से अधिक होता है।
- (ii) यदि  $x$  तथा  $y$  के बीच दोनों समाश्रयण गुणांक 0.8 तथा 0.2 हों तो उनके बीच सहसंबंध गुणांक 0.4 है।
- (iii) दो रेखाएँ जिनकी दिक्-कोज्याएँ  $l_1, m_1, n_1$  तथा  $l_2, m_2, n_2$  हैं परस्पर लम्बवत् हैं, तब  $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ .
- (iv) बिन्दु  $-2\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$  व  $3\hat{i} - 6\hat{j} - 8\hat{k}$  तथा  $\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$  समरेख हैं।
- (v)  $\frac{d}{dx} \log(\tan x)$  का मान  $\operatorname{cosec} 2x$  है।

5. सही जोड़ियाँ बनाइए : 5×1=5

- | ‘A’   | ‘B’                 |
|---|---------------------|
| (i) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$ का मान   | (a) 1               |
| (ii) वक्र $y = 2x$ , $0 \leq x \leq 3$ से घिरे हुए क्षेत्र का क्षेत्रफल होगा  | (b) 0               |
| (iii) दो समान्तर सदिशों का सदिश गुणन होता है  | (c) $\frac{2}{3}$   |
| (iv) यदि $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 9\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + \lambda\hat{j} + 3\hat{k}$ परस्पर समान्तर हैं तो $\lambda$ का मान होगा | (d) 9               |
| (v) यदि $y = \tan(\tan^{-1} x)$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा   | (e) $\frac{\pi}{4}$ |



6. सिद्ध कीजिए कि  $2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$  और  $-2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$  परस्पर लम्ब हैं।

2

अथवा

यदि  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 4$  तथा  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$  हो तो सदिश  $\vec{a}$  व  $\vec{b}$  के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

7. सदिश  $6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$  की दिक् कोज्याएँ ज्ञात कीजिए।

2

अथवा

उस गोले का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र  $(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$  तथा त्रिज्या 5 है।

8. दो सदिश  $\vec{a}$  तथा  $\vec{b}$  इस प्रकार हैं कि  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$  तथा  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$  तो सदिशों  $\vec{a}$  तथा  $\vec{b}$  के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

2

अथवा

सिद्ध कीजिए कि  $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2$ .

9.  $\int \frac{dx}{1-4x}$  का मान ज्ञात कीजिए।

2

अथवा

$\int \frac{\sec x}{\sec x - \tan x} dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

10.  $\int_0^{\pi/4} \sin 2x dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

2

अथवा

$\int_0^{\pi/2} \sin^2 dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

11. उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं A(3, 4, 5) तथा B(-1, -2, 4) से समान दूरी पर है। 3

अथवा

एक रेखा  $x$ -अक्ष तथा  $y$ -अक्ष के साथ क्रमशः  $120^\circ$  तथा  $60^\circ$  के कोण बनाती है। रेखा द्वारा  $z$ -अक्ष से बनाया गया कोण ज्ञात कीजिए।

12. सरल रेखाओं  $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}$  तथा  $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$  के मध्य कोण ज्ञात कीजिए। 3

अथवा

उस वृत्तीय परिच्छेद की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जब समतल  $2x + 3y - 6z = 28$  गोले  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  को काटता है।

13. किसी  $\Delta ABC$  में सिद्ध कीजिए कि  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ . 3

अथवा

यदि  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$  हो तो सिद्ध कीजिए कि  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$  जहाँ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  शून्येतर सदिश हैं।

14. बिन्दु (2, -1, 3) की समतल  $\vec{r} \cdot (3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}) + 15 = 0$  से दूरी ज्ञात कीजिए। 3

अथवा

उस सरल रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1, 2, 3) से गुजरती है तथा सदिश  $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$  के समान्तर है। इसका कार्तीय रूप भी लिखिए।

15. निम्नांकित भिन्न को आंशिक भिन्नों में विभक्त कीजिए : 4

$$16/(x + 2)(x^3 - 4).$$

अथवा

$$\frac{x^2 - 5x - 1}{(x - 1)^2(x - 2)}$$
 को आंशिक भिन्न में विभक्त कीजिए।



16. यदि  $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi$  हो तो सिद्ध कीजिए कि  $x + y + z = xyz$ । 4

अथवा

यदि  $\sin^{-1}x + \tan^{-1}x \frac{\pi}{2}$  हो तो सिद्ध कीजिए कि  $2x^2 = \sqrt{5} - 1$ ।

17.  $\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{e^{2x} - e^{-2x}}$  का  $x$  के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। 4

अथवा

अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए  $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ ।

18. यदि  $y = \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \dots \infty}}$  हो तो सिद्ध कीजिए कि  $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{1 - 2y}$ । 4

अथवा

यदि  $x^y = e^x - y$  हो तो सिद्ध कीजिए कि  $\frac{dy}{dx} = \log_e x / (1 + \log_e x)^2$ ।

19. यदि लाभ फलन  $p(x) = 41 + 24x - 18x^2$  हो तो कम्पनी द्वारा प्राप्त किया गया उच्चिष्ठ लाभ ज्ञात कीजिए। 4

अथवा

यदि  $f(x) = \cos x + \sin x$  का अन्तराल  $0 \leq x \leq \pi$  में उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

20. चर  $x$  व  $y$  के मूल्यों के निम्नांकित युग्मों के लिए सहप्रसरण की गणना कीजिए : 4  
(1, 10), (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6), (6, 5), (7, 4), (8, 3), (9, 2), (10, 1).

अथवा

दो चर राशियों  $x$  व  $y$  का सहसंबंध गुणांक  $r$  हो तो सिद्ध कीजिए  $r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x\sigma_y}$

जहाँ  $\sigma_x^2$  और  $\sigma_y^2$  क्रमशः  $x, y$  के प्रसरण गुणांक हैं।



21. यदि समाश्रयण रेखाएँ क्रमशः  $3x + 12y - 19 = 0$  तथा  $9x + 3y - 46 = 0$  हों तो सहसंबंध गुणांक ज्ञात कीजिए। 4

अथवा

यदि समाश्रयण रेखाओं के बीच का कोण  $\theta$  है तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\tan \theta = \frac{1 - r^2}{r^2} \left[ \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \right]$$

22. उन रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए जिनकी दिक् कोज्याएँ निम्नांकित समीकरणों द्वारा निर्धारित हैं : 5

$$3l + m + 5n = 0 \text{ व}$$

$$6mn - 2nl + 5lm = 0.$$

अथवा

उन रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए जिनकी दिक् कोज्याएँ निम्नांकित समीकरणों द्वारा निर्धारित हैं :

$$2l + 2n - m = 0$$

$$mn + nl + lm = 0.$$

23. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित फलन  $x = 1$  पर संतत है : 5

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{जब } x \neq 1 \\ 2 & \text{जब } x = 1 \end{cases}$$

अथवा

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & \text{जब } x \neq 0 \\ 1 & \text{जब } x = 0 \end{cases}$$

क्या  $f(x)$ ,  $x = 0$  पर संतत है ?

24. परवलय  $y^2 = 4ax$  और  $x^2 = 4ay$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

अथवा

वक्र  $x^2 = 4y$  तथा रेखा  $x = 4y - 2$  के अन्तर्गत क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

25. अवकल समीकरण  $x(x - y)dy + y^2 dx = 0$  को हल कीजिए। 5

अथवा

अवकल समीकरण  $(x^2 + xy)dy = (x^2 + y^2)dx$  को हल कीजिए।

26. 'A' 75% स्थितियों में सत्य बोलता है तथा 'B' 80% स्थितियों में सत्य बोलता है, तो कितने प्रतिशत स्थितियों में एक तथ्य को बोलने में एक दूसरे का विरोध करेंगे ? 5

अथवा

एक सिक्का 6 बार उछाला जाता है। कम से कम 4 शीर्ष आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।



उत्तर क्रमांक (लिखीय) - 832 'Set A'

प्र० 9 हल:- माना  $I = \int \frac{dx}{1-4x}$

$1-4x = t$  रखने पर

$$\frac{d(1-4x)}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

$-4 = \frac{dt}{dx} \Rightarrow dx = -\frac{1}{4} dt$

$$I = -\frac{1}{4} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{4} \log t + C$$

$$I = -\frac{1}{4} \log(1-4x) + C \quad \text{Ans}$$

09 अथवा - हल :- माना  $I = \int \frac{\sec x}{\sec x - \tan x} dx$

$$I = \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{(\sec x - \tan x)(\sec x + \tan x)} dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec^2 x - \tan^2 x} dx$$

$$= \int (\sec^2 x + \sec x \tan x) dx$$

$$= \tan x + \sec x \quad \text{Ans}$$

प्र० 10 हल माना  $I = \int_0^{\pi/4} \sin 2x dx$

$$= -\left[ \frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\pi/4}$$

$$= -\frac{1}{2} [\cos \frac{2\pi}{4} - \cos 0]$$

$$= -\frac{1}{2} [\cos \pi/2 - \cos 0]$$

$$= -\frac{1}{2} [0 - 1] = 1/2 \quad \text{Ans}$$

10 अथवा हल. माना  $I = \int_0^{\pi/2} \sin x dx$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[ x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\sin \pi}{2} \right) - 0 + \sin 0 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{0}{2} \right] = \pi/4 \quad \text{Ans}$$

प्र० 11 - हल:- माना कि अभीष्ट बिन्दु P(x,y,z) है किमा है PA = PB.

$$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2}$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = (x+1)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 + z^2 - 10z + 25 = x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 8z + 16$$

$$\Rightarrow -6x - 8y - 10z + 50 = 2x + 6y - 8z + 21$$

$$\Rightarrow 8x + 12y + 2z - 29 = 0 \quad \text{Ans}$$

प्र० 11 अथवा

माना रेखा z-अक्ष के साथ 1 कोण बनाती है

तो  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

$\alpha = 120^\circ$  तथा  $\beta = 60^\circ$

$$\cos^2 120^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\cos^2 \gamma = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \gamma = \sqrt{1/2}$$

$\gamma = 45^\circ$  या  $135^\circ$  Ans

प्र० 12 हल. दी गई रेखाएँ  $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}$

तथा  $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$

रेखा ① के दिक् अनुपात =  $a_1, b_1, c_1 = 1, 0, -1$

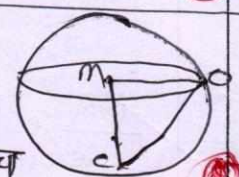
रेखा ② के दिक् अनुपात =  $a_2, b_2, c_2 = 3, 4, 5$

प्र० 12 अथवा - गोले का समी.  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

गोले का केंद्र (0,0,0) तथा त्रिज्या 5 है. यहाँ OC = 5.

समतल का समीकरण  $2x + 3y - 6z - 28 = 0$

समतल ② पर गोले का केंद्र (0,0,0) पर होने के कारण की लम्बाई





उत्तर मध्यमा (द्वितीय खण्ड) - 832 "Set-A"

<p>प्रश्न 01</p> <p>सही विकल्प चुनकर लिखिए :-</p> <p>हल :-</p>	<p>(i) (c) - <math>\frac{1}{3} [\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}]</math> (ii) (a) - <math>\frac{\pi}{3}</math> (iii) (c) - <math>\frac{19}{9}</math></p> <p>(iv) (a) - <math>\frac{1}{9}</math> खेती/लेकड 2 (v) (b) <math>\sin x</math>.</p>	<p>उत्तर पर 01 अंक उत्तर करें।</p>
<p>प्रश्न 02</p> <p>निम्न का एक शब्द/वाक्य में उत्तर कीजिए :-</p>	<p>(i) <math>Ax + By + D = 0</math> (ii) 4 (iii) <math>\frac{\vec{v}}{ \vec{v} }</math> (iv) 0 (v) <math>\cos x^3</math></p>	<p>उत्तर पर 01 अंक उत्तर करें।</p>
<p>प्रश्न 03</p> <p>रिक्त स्थानों की पूर्ति</p>	<p>(i) <math>\frac{h}{2} [y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})]</math> (ii) <math>x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \times f(x_n)</math></p> <p>(iii) <math>\frac{h}{3} [y_1 + y_{2n+1} + 4(y_2 + y_4 + y_6 + \dots) + 2(y_3 + y_5 + \dots + y_{2n-1})]</math></p> <p>(iv) 2.167 (v) 6.915.</p>	
<p>प्रश्न 04</p> <p>सत्य/असत्य बताइए :-</p>	<p>(i) असत्य (ii) सत्य (iii) सत्य (iv) सत्य (v) असत्य</p>	<p>उत्तर पर 01 अंक उत्तर करें।</p>
<p>प्रश्न 05</p> <p>सही जोड़ियाँ बनाइए :-</p>	<p>(i) <math>\rightarrow</math> (c) <math>\frac{\pi}{4}</math> (ii) <math>\rightarrow</math> (d) 9 (iii) <math>\rightarrow</math> (b) 0 (iv) <math>\rightarrow</math> (e) <math>\frac{2}{3}</math> (v) <math>\rightarrow</math> (a) 1.</p>	
<p>प्रश्न 06</p> <p>हल :- माना <math>\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}</math>  <math>\vec{b} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}</math>  <math>\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) \cdot (-2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})</math>  <math>= (-4 - 6 + 10) = 0</math>          अतः दिये गये सदिश परस्पर लम्बवर्त हैं।</p>	<p>06 का अर्थ</p> <p>हल <math>\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}   \vec{b}  \cos \theta</math>  <math>6 = 4 \times 4 \cdot \cos \theta</math>  <math>6 = 16 \cos \theta</math>  <math>\cos \theta = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}</math>  <math>\Rightarrow \theta = \cos^{-1}(\frac{3}{8})</math></p>	
<p>प्रश्न 07</p> <p>हल <math>\cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2}</math>  <math>= \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7</math>          सदिश की दिक् कोण - <math>\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}</math></p>	<p>07 का अर्थ</p> <p>गोले का समीकरण (जिष्ण केन्द्र <math>\vec{c}</math> है और बिन्दु <math>\vec{a}</math> है) <math>=  \vec{r} - \vec{c}  = a</math>          यहाँ <math>\vec{c} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}</math> तथा <math>a = 5</math>  <math> \vec{r} - (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})  = 5</math></p>	
<p>प्रश्न 08</p> <p>हल - माना <math>\vec{a}</math> व <math>\vec{b}</math> के बीच का कोण <math>\theta</math> है तो <math>\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}   \vec{b}  \cos \theta</math>  <math>3 = 2 \times 3 \times \cos \theta</math>  <math>3 = 6 \cos \theta</math>  <math>\cos \theta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}</math>  <math>\therefore \theta = \frac{\pi}{3}</math> Ans.</p>	<p>08 का अर्थ <math>\rightarrow</math> माना सदिश <math>\vec{a}</math> व <math>\vec{b}</math> के बीच का कोण <math>\theta</math> है <math>\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}   \vec{b}  \cos \theta</math>  <math>(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 =  \vec{a} ^2  \vec{b} ^2 \cos^2 \theta</math>  <math>(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq  \vec{a} ^2  \vec{b} ^2 \cos^2 \theta \leq  \vec{a} ^2  \vec{b} ^2</math></p>	

704



प्रश्न 14

हल - विवेक समतल का समीकरण

$$\vec{r} \cdot (3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}) + 15 = 0$$

$\vec{r} \cdot \vec{n} = p$  से तुलना करने पर

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k} \text{ व } p = -15$$

दिया गया बिंदु है  $(2, -1, 3)$

$$\text{भागाने} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$$

बिंदु  $\vec{r}_0$  से समतल  $\vec{r} \cdot \vec{n} = p$  की दूरी

$$= \frac{|\vec{r}_0 \cdot \vec{n} - p|}{|\vec{n}|}$$

$$\therefore \text{दूरी} = \frac{|(2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}) + 15|}{\sqrt{9+4+36}}$$

$$= \frac{|6 - 2 - 18 + 15|}{\sqrt{49}} = \frac{1}{7} \text{ Ans}$$

प्रश्न 15 का विषय -

माना रेखा का सदिश समीकरण है -

$$\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$$

$$\text{यहाँ } \vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + t(\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \text{ रखने पर}$$

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + t(\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = \hat{i}(1+t) + \hat{j}(2-2t) + \hat{k}(3+3t)$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  के गुणांक की तुलना करने पर

$$x = 1+t, y = 2-2t, z = 3+3t$$

$$x-1=t, y-2=-2t, z-3=3t$$

$$\frac{x-1}{1} = t, \frac{y-2}{-2} = -t, \frac{z-3}{3} = t$$

रेखा का कार्तीय समीकरण

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{3} \text{ Ans}$$

प्रश्न 15

$$\text{हल - } \frac{16}{(x+2)(x^2-4)}$$

$$= \frac{16}{(x-2)(x+2)(x+2)} = \frac{16}{(x+2)(x-2)^2}$$

$$\frac{16}{(x+2)(x-2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{A(x-2)^2 + B(x+2)(x-2) + C(x-2)}{(x+2)(x-2)^2}$$

$$16 = A(x-2)^2 + B(x+2)(x-2) + C(x-2)$$

$$x=2 \text{ देने पर } 4C=16 \quad C=4$$

$$x=-2 \text{ देने पर } 16A=16 \quad A=1$$

$$x^2 \text{ के गुणांक की तुलना } A+B=0$$

$$A+B=0 \quad B=-A=-1$$

$$\frac{16}{(x+2)(x-2)^2} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2}$$

Ans

प्रश्न 15 का विषय हल -

$$\text{माना } \frac{x^2-5x-1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2}$$

$$= \frac{A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)}$$

$$x^2-5x-1 = A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2$$

$$x=1 \text{ देने पर } B=5$$

$$x=2 \text{ देने पर } C=7$$

जमी के दोनों पक्षों में  $x^2$  के गुणांक की तुलना करने पर  $1=A+C$

$$A=1-C=1-(-7)=8$$

A, B, C के मान  $\odot$  में रखने

$$\frac{x^2-5x-1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{8}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2} - \frac{7}{x-2}$$

Ans

705



उत्तर अथवा (कितनी सही) - 232

Q12

माना रेखा ① को  $\theta$  की ंका कोण

① है तो  $\cos \theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$

$\cos \theta = \frac{1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 5}{\sqrt{1+0+1} \cdot \sqrt{9+16+25}}$  ①

$\cos \theta = \frac{-2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}} = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}$

$\cos \theta = -\frac{1}{5}$  ①

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{5}\right)$  ①  
Ans

$CM = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 6 \cdot 0 - 28$

$\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}$

$= \frac{-28}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{-28}{\sqrt{49}} = \frac{-28}{7}$  ①

$= -4$

द्वितीय परिच्छेद की बिज्या

$OM = \sqrt{(OC)^2 - (CM)^2}$

$= \sqrt{5^2 - (-4)^2} = \sqrt{25 - 16}$  ①

$= \sqrt{9} = 3$  उत्तर

Q13

हल-

त्रिभुज ABC को  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

वेक्टर के योग के नियम से  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

$\vec{a} = -(\vec{b} + \vec{c})$

$\vec{a}^2 = [-(\vec{b} + \vec{c})]^2$

$\vec{a}^2 = [-(\vec{b} + \vec{c})]^2$

$\Rightarrow |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos(\pi - A)$  ①

$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$\Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$  ①  
Ans

Q13 अथवा

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$  ①

$\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$

$\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{c} \times \vec{c}$  ①

$\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{c} \times \vec{c}$

$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$  ②

जानी ① से  $\vec{b} + \vec{c} = -\vec{a}$

$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = -\vec{a} \times \vec{a}$

$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0}$

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{a} \times \vec{c}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}$  ③

जानी ① से  $\vec{a} + \vec{c} = -\vec{b}$  ①

$\vec{b} \times (\vec{a} + \vec{c}) = -\vec{b} \times \vec{b}$

$\vec{b} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{c} = \vec{0}$

$\vec{b} \times \vec{c} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$\vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  ④

जानी ③ व ④ से

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$  ①



उत्तर मध्यमा (द्वितीय खण्ड) - 832

**प्रश्न 16** - हल - दिया है,  $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi$

$\Rightarrow \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy} + \tan^{-1}z = \pi$  ①

$\Rightarrow \tan^{-1} \frac{1 - \frac{x+y}{1-xy}}{\frac{x+y}{1-xy}} = \pi$

$\Rightarrow \tan^{-1} \frac{x+y+z(1-xy)}{1-xy - (x+y)z} = \pi$  ①

$\Rightarrow \tan^{-1} \frac{x+y+z - xyz}{1-xy - xz - yz} = \pi$  ①

$\Rightarrow \frac{x+y+z - xyz}{1-xy - xz - yz} = \tan \pi = 0$

$\Rightarrow x+y+z - xyz = 0$

$\Rightarrow x+y+z = xyz$  ①

**प्रश्न 16 का अर्थ** हल -

$\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{2}$

$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \tan^{-1}x = \cos^{-1}x$

$\tan^{-1}x = \cos^{-1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$x = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$x^2 = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^4 + x^2 = 0$

$x^2 = -1 \pm \sqrt{1-4(1)(-1)}/2 \cdot 1$

$x^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  मा  $x^2 = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  (जो कि असंभव है)

$\therefore 2x^2 = \sqrt{5}-1$  ①

**प्रश्न 17** - हल माना  $y = \frac{e^{2x} - 2x}{e^{2x} + e^{-2x}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{e^{2x} - 2x}{e^{2x} + e^{-2x}} \right)$  ①

$= \frac{(e^{2x} - 2x) \frac{d}{dx}(e^{2x} + e^{-2x}) - (e^{2x} + e^{-2x}) \frac{d}{dx}(e^{2x} - 2x)}{(e^{2x} + e^{-2x})^2}$  ①

$= \frac{(e^{2x} - 2x) \times 2(e^{2x} - e^{-2x}) - (e^{2x} + e^{-2x}) \times 2(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + e^{-2x})^2}$  ①

$= \frac{2[(e^{2x} - 2x)^2 - (e^{2x} + e^{-2x})^2]}{(e^{2x} + e^{-2x})^2}$  ①

$= \frac{2[(e^{2x})^2 + (e^{-2x})^2 - 2e^{2x} \cdot e^{-2x} - (e^{2x})^2 - (e^{-2x})^2 - 2e^{2x} \cdot e^{-2x}]}{(e^{2x} + e^{-2x})^2}$  ①

$= \frac{2(-4)}{(e^{2x} + e^{-2x})^2} = \frac{-8}{(e^{2x} + e^{-2x})^2}$  ①

Ans

**प्रश्न 17 का अर्थ** हल -

$y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

अभिप्रेत अथवा अर्थ माना करेंगे तो

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right)$  ①

$= \frac{(e^x - e^{-x}) \frac{d}{dx}(e^x + e^{-x}) - (e^x + e^{-x}) \frac{d}{dx}(e^x - e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$  ①

$= \frac{(e^x - e^{-x}) \left[ \frac{d}{dx} e^x + \frac{d}{dx} e^{-x} \right] - (e^x + e^{-x}) \left[ \frac{d}{dx} e^x - \frac{d}{dx} e^{-x} \right]}{(e^x - e^{-x})^2}$  ①

$= \frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$  ①

$= \frac{(e^{2x} - e^{-2x}) - (e^{2x} + e^{-2x})}{(e^x - e^{-x})^2}$

$= \frac{e^{2x} + (e^{-2x})^2 - 2e^x \cdot e^{-2x} - (e^{2x})^2 - (e^{-2x})^2 - 2e^x \cdot e^{-2x}}{(e^x - e^{-x})^2}$  ①

$= \frac{-4e^x \cdot e^{-x}}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$  Ans ①



उत्तर मध्यमा (द्वितीय भाग) - 832

9018

दिए  $\therefore y = \sqrt{\cos x} \sqrt{\cos x + 5 \cos x + \dots}$   
 $\Rightarrow y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos x} + \dots$   
 $\Rightarrow y = \sqrt{\cos x} + y$  का फलन पर  
 $y^2 = \cos x + y$   
 $\Rightarrow y^2 - y = \cos x$  (1)  
 $\frac{d}{dx}(y^2 - y) = \frac{d}{dx} \cos x$   
 $\Rightarrow \frac{d}{dy} y^2 \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = -\sin x$   
 $\Rightarrow 2y \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = -\sin x$  (1)  
 $\Rightarrow (2y - 1) \frac{dy}{dx} = -\sin x$   
 $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x}{2y - 1}$  (1)  
 $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{1 - 2y}$  (1)

दिए  $x^y = e^{y \log x}$ . लू लेने पर  
 $\log x^y = \log(e)^{xy}$   
 $y \log x = (x-y) \log e$   
 $y \log x = (x-y) \Rightarrow y \log x + y = x$   
 $\Rightarrow y(1 + \log x) = x$  (1)  
 $\Rightarrow y = \frac{x}{1 + \log x}$   
 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{1 + \log x} \right)$   
 $= \frac{(1 + \log x) \frac{d}{dx} x - x \frac{d}{dx} (1 + \log x)}{(1 + \log x)^2}$  (1)  
 $= \frac{(1 + \log x) \cdot 1 - x(0 + \frac{1}{x})}{(1 + \log x)^2}$  (1)  
 $= \frac{1 + \log x - 1}{(1 + \log x)^2}$   
 $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1 + \log x)^2}$  (1)

9019

दिए  $p(x) = 41 + 24x - 18x^2$   
 $\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx} (41 + 24x - 18x^2)$   
 $= \frac{d}{dx} 41 + 24 \frac{d}{dx} x - 18 \frac{d}{dx} x^2$  (1)  
 $= 0 + 24 - 18 \cdot 2x$   
 $\frac{dp}{dx} = 24 - 36x$   $x$  के सापेक्ष अवकलन (1)  
 $\frac{d^2p}{dx^2} = \frac{d}{dx} (24 - 36x)$  (1)  
 $\frac{d^2p}{dx^2} = \frac{d}{dx} 24 - 36 \frac{d}{dx} x$   
 $= 0 - 36$   
 $\frac{d^2p}{dx^2} = -36$   
 उच्चिष्ठता के लिए  $\frac{dp}{dx} = 0$  (1)  
 $24 - 36x = 0 \Rightarrow 36x = 24$   
 $x = \frac{24}{36}$   $x = \frac{2}{3}$  पर  $\frac{d^2p}{dx^2} = -36$  (नकारात्मक) (1)  
 $x = \frac{2}{3}$  पर द्वितीय अवकलन उच्चिष्ठता होगा.  
 $p(\frac{2}{3}) = 41 + 24 \cdot \frac{2}{3} - 18(\frac{2}{3})^2 = 41 + 16 - 18 \cdot \frac{4}{9} = 41 + 16 - 8 = 49$  (1)

9019 का अथवा हल -  
 $f(x) = \cos x + \sin x$ .  $x$  के सापेक्ष अवकलन  
 $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} (\cos x + \sin x)$   
 $\Rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx} \cos x + \frac{d}{dx} \sin x$  (1)  
 $\Rightarrow f'(x) = -\sin x + \cos x$   
 जहाँ  $x$  के सापेक्ष अवकलन को ले  
 $\frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx} (-\sin x + \cos x)$  (1)  
 $f''(x) = -\frac{d}{dx} \sin x + \frac{d}{dx} \cos x$   
 $f''(x) = -\cos x - \sin x$   
 उच्चिष्ठता निम्नलिखित के लिए  $f'(x) = 0$   
 $-\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x$  (1)  
 $\frac{\sin x}{\cos x} = 1 \Rightarrow \tan x = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$   
 $\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$  तथा  $f''(x) \big|_{x=\frac{\pi}{4}} = -\cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$  (नकारात्मक)  
 $x = \frac{\pi}{4}$  पर द्वितीय अवकलन उच्चिष्ठता होगा.  
 उच्चिष्ठता मान  $f(\frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$   
 $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$  Ans (1)



उत्तर मध्यमा (द्वितीय खण्ड) - 832

प्रश्न 20

दिए गए हैं

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σx = 55
y	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	Σy = 55
xy	10	18	24	28	30	30	28	24	18	10	Σxy = 220

n = 10

$$\begin{aligned} \therefore \text{Cov}(xy) &= \frac{\sum xy}{n} - \frac{\sum x}{n} \cdot \frac{\sum y}{n} \\ &= \frac{220}{10} - \frac{55}{10} \cdot \frac{55}{10} \\ &= 22 - 5.5 \times 5.5 \\ \text{Cov}(xy) &= 22 - 30.25 = -8.25 \end{aligned}$$

प्रश्न 20 का अथवा हल :-

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^2 &= \frac{1}{n} [(xy) - (\bar{x}\bar{y})]^2 \\ &= \frac{1}{n} [x - \bar{x} - (y - \bar{y})]^2 \\ &= \frac{1}{n} [(x - \bar{x}) - (y - \bar{y})]^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum [(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 - 2(x - \bar{x})(y - \bar{y})] \\ &= \frac{1}{n} \sum (x - \bar{x})^2 + \frac{1}{n} \sum (y - \bar{y})^2 - 2 \frac{1}{n} \sum (x - \bar{x})(y - \bar{y}) \\ \sigma_{xy}^2 &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2r \sigma_x \sigma_y \quad \left\{ r = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n \sigma_x \sigma_y} \right. \\ 2r \sigma_x \sigma_y &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2 \\ r &= \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2}{2 \sigma_x \sigma_y} \end{aligned}$$

प्रश्न 1

दिए गए हैं x पर समाश्रयण रेखा है

$$3x + 12y - 19 = 0$$

$$12y = 19 - 3x$$

$$y = \frac{19}{12} - \frac{3x}{12}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{19}{12}$$

यहाँ  $b_{yx} = -1/4$

x का y पर समाश्रयण रेखा है

$$9x + 3y - 46 = 0$$

$$\Rightarrow 9x = -3y + 46$$

$$x = -\frac{3y}{9} + \frac{46}{9}$$

$$x = -\frac{1}{3}y + \frac{46}{9}$$

$$b_{yx} = -1/3, \therefore r^2 = b_{yx} \cdot b_{xy}$$

$$r^2 = -\frac{1}{4} \cdot -\frac{1}{3} = 1/12$$

$b_{yx} \cdot b_{xy}$  को  $r^2$  के लिए समान होते हैं

$$r = -\frac{1}{\sqrt{12}} \text{ Ans}$$

प्रश्न 2 का अथवा :-

हल :- y की x पर समाश्रयण रेखा का समीकरण

$$y - \bar{y} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x})$$

$$\Rightarrow y = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} x - r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \bar{x} + \bar{y}$$

रेखा 1 की उतारता  $m_1 = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$

x की y पर समाश्रयण रेखा का समीकरण  $y - \bar{y} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (x - \bar{x})$

$$\frac{(x - \bar{x})}{\sigma_x} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sigma_y}{r \sigma_x} x - \frac{\sigma_y}{r \sigma_x} \bar{x} + \bar{y}$$

रेखा 2 की उतारता  $m_2 = \frac{\sigma_y}{r \sigma_x}$

माना रेखाओं के बीच का कोण  $\theta$  है तब

$$\cos \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{\frac{\sigma_y}{r \sigma_x} - r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}}{1 + r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot \frac{\sigma_y}{r \sigma_x}}$$

$$= \frac{\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \left[ \frac{1}{r} - r \right]}{1 + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}} = \frac{\sigma_y (1 - r^2) \sigma_x^2}{\sigma_x r (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}$$

$$= \frac{r \sigma_x^2}{r} \left[ \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \right]$$

OK

Handwritten signature



उत्तर मध्यमा (विशेषांक) - 832

प्रश्न 22 का उत्तर देना है।

प्रश्न 22  
 3l + m + 5n = 0  
 6mn - 2nl + 5lm = 0  
 समी 1 से m = -(3l + 5n)  
 म का मान 2 में  
 6n(3l + 5n) - 2nl - 5l(3l + 5n) = 0  
 -18nl - 30n^2 - 2nl - 15l^2 - 25nl = 0  
 -15l^2 - 30n^2 - 45ln = 0  
 l^2 + 3ln + 2n^2 = 0  
 l^2 + 2ln + ln + 2n^2 = 0  
 l(l + 2n) + n(l + 2n) = 0  
 (l + 2n)(l + n) = 0  
 l + 2n = 0 or l + n = 0  
 1 + 0 + m + 2n = 0  
 l + n = 0 or m + n = 0

2l + 2n - m = 0  
 mn + nl + lm = 0  
 समी 1 से l = (m - 2n)/2  
 म का मान 2 में  
 m \* n + n \* ((m - 2n)/2) + ((m - 2n)/2) \* m = 0  
 2mn + mn - 2n^2 + m^2 - 2mn = 0  
 m^2 - 2n^2 + mn = 0  
 m^2 + mn - 2n^2 = 0  
 m^2 + 2mn - mn - 2n^2 = 0  
 m(m + 2n) - n(m + 2n) = 0  
 m + 2n = 0 or m - n = 0  
 समी 1 व 3 से 2l + m + 2n = 0  
 0l + m + 2n = 0  
 l/(-2) = m/0 = n/(-4) = k  
 l = -2k, m = 0, n = -4k

3l + m + 5n = 0  
 l + m + 2n = 0  
 l/2 = m/5 = n/0 = k  
 l = 2k, m = 5k, n = 0  
 l^2 + m^2 + n^2 = 1  
 (2k)^2 + (5k)^2 + 0 = 1  
 4k^2 + 25k^2 = 1  
 29k^2 = 1  
 k = 1/sqrt(29)  
 l = 2/sqrt(29), m = 5/sqrt(29), n = 0

l^2 + m^2 + n^2 = 1  
 (2k)^2 + (5k)^2 + 0 = 1  
 4k^2 + 25k^2 = 1  
 29k^2 = 1  
 k = 1/sqrt(29)  
 l = 2/sqrt(29), m = 5/sqrt(29), n = 0  
 समी 1 व 4 से 2l - m + 2n = 0  
 0l + m - n = 0  
 l/2 = m/0 = n/(-1) = k  
 l = 2k, m = 0, n = -k  
 l^2 + m^2 + n^2 = 1  
 (2k)^2 + 0 + (-k)^2 = 1  
 4k^2 + k^2 = 1  
 5k^2 = 1  
 k = 1/sqrt(5)  
 l = 2/sqrt(5), m = 0, n = -1/sqrt(5)

cos theta = l1l2 + m1m2 + n1n2  
 = (2/sqrt(29)) \* (2/sqrt(29)) + (5/sqrt(29)) \* (5/sqrt(29)) + 0 \* 0  
 = 4/29 + 25/29 = 29/29 = 1  
 theta = 0

cos theta = l1l2 + m1m2 + n1n2  
 = (2/sqrt(5)) \* (2/sqrt(5)) + 0 \* 0 + (-1/sqrt(5)) \* (-1/sqrt(5))  
 = 4/5 + 0 + 1/5 = 5/5 = 1  
 theta = 0

सही



उत्तर अथवा (कितनी सवाल) - 232

**प्रश्न 23**  $x = 1+h$  रखने पर  
 जब  $x \rightarrow 1$  तब  $h \rightarrow 0$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{1+h-1}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h^2+2h-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2+2h}{h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+2) = 2$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

$x = 1-h$  रखने पर जब  $x \rightarrow 1$   
 $h \rightarrow 0$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1-h)^2 - 1}{1-h-1}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h^2-2h-1}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2-2h}{-h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-2)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h-2) = -2$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$   
 दिया है  $f(x) = 2$   
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(x) = 2$   
 अतः दिया गया फलन  $x=1$  पर निरंतर है।

**प्रश्न 23 का अर्थ**  
 जब  $x = 0+h$  रखने पर जब  $x \rightarrow 0$   
 $h \rightarrow 0$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2(0+h)}{0+h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{2h} \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$   
 जब  $x = 0-h$  रखने पर जब  $x \rightarrow 0$   
 $h \rightarrow 0$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2(0-h)}{0-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{h}$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{2h} \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$   
 दिया है  $f(x) = 1$   $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(x)$   
 अतः दिया गया फलन  $x=0$  पर निरंतर नहीं है।

**प्रश्न 4**  
 एक वक्र  $x^2 = 4y$  के परवलय को विभाजित करता है तथा जो ऊँचे स्थानों पर  $x^2 - 2$  द्विघात वक्र को छूने पर  $(4y-2)^2 = 4y$   
 $\Rightarrow 16y^2 - 16y + 4 - 4y = 0$   
 $\Rightarrow 16y^2 - 20y + 4 = 0$   
 $\Rightarrow 4y^2 - 5y + 1 = 0$   
 $4y^2 - 4y - y + 1 = 0$   
 $4y(y-1) - (y-1) = 0 \Rightarrow (y-1)(4y-1) = 0$   
 $y-1=0 \Rightarrow y=1$  &  $4y-1=0 \Rightarrow y = \frac{1}{4}$   
 जब  $y = \frac{1}{4}$  तब  $x = 4y - 2$  से  $x = -1$  तथा  $y = 1$  तब  $x = 2$  इसलिए बिंदु  $A(-1, \frac{1}{4})$  तथा  $B(2, 1)$  हैं।  
 इन बिंदुओं पर  $\Delta ABO = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{उंचाई}$   
 $\frac{1}{2} \times (2 - (-1)) \times (1 - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$

**प्रश्न 4 का अर्थ**  
 दिया है  $y^2 = 4ax$   
 $x^2 = 4ay$   
 वक्र  $y = \frac{x^2}{4a}$   
 इनका मान  $(0,0)$   
 $(\frac{x^2}{4a})^2 = 4ax$   
 $\frac{x^4}{16a^2} = 4ax$   
 $\Rightarrow x^4 = 64a^3x$   
 $\Rightarrow x^4 - 64a^3x = 0$   
 $\Rightarrow x(x^3 - 64a^3) = 0 \Rightarrow x = 0$   
 &  $x^3 - 64a^3 = 0$   
 $x^3 = 64a^3$   
 $x = 4a$



उत्तर मध्यमा (मिमीय) - 832

प्र० 24 का शेष क्षेत्र OABO के लिये समाकलन की लम्बाय  $x=1$ ,  $x=2$  तक है।  
 समीकृत क्षेत्रफल  $S = \int_{-1}^2 y_1 dx - \int_{-1}^2 y_2 dx$   
 $S = \int_{-1}^2 \frac{1}{4}(x+2) dx - \int_{-1}^2 \frac{x^2}{4} dx$   
 $\therefore x=4y-2$  है  $y_1 = \frac{1}{4}(x+2)$   
 तथा वक्र  $x^2=4y$  है  $y_2 = \frac{x^2}{4}$   
 $S = \frac{1}{4} \int_{-1}^2 (x+2) dx - \frac{1}{4} \int_{-1}^2 x^2 dx$   
 $= \frac{1}{4} \left[ \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 - \frac{1}{4} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2$   
 $= \frac{1}{4} [(2+4) - (\frac{1}{2}-2)] - \frac{1}{4} [\frac{8}{3} + \frac{1}{3}]$   
 $= \frac{1}{4} [6 + \frac{3}{2}] - \frac{1}{4} [\frac{9}{3}]$   
 $S = \frac{1}{4} (\frac{15}{2} - \frac{3}{1}) = \frac{15-6}{8} = \frac{9}{8}$

प्र० 24 अथवा का शेष  
 या  $x=0$  तथा  $y=0$   
 $x=4a$  तथा  $y=4a$   
 क्षेत्र के लिये बिन्दु O (0,0) B (4a, 4a)  
 समीकृत क्षेत्रफल  $= \int_0^{4a} (y_1 - y_2) dx$   
 $= \int_0^{4a} (2\sqrt{ax} - \frac{x^2}{4a}) dx$   
 $= 2\sqrt{a} \int_0^{4a} x^{1/2} dx - \frac{1}{4a} \int_0^{4a} x^2 dx$   
 $= 2\sqrt{a} \frac{2}{3} [x^{3/2}]_0^{4a} - \frac{1}{4a} [\frac{x^3}{3}]_0^{4a}$   
 $= \frac{4\sqrt{a}}{3} (4a)^{3/2} - \frac{1}{12a} (4a)^3$   
 $= \frac{4\sqrt{a}}{3} 4^{3/2} a^{3/2} - \frac{1}{12a} 64a^3$   
 $= \frac{32}{3} a^2 - \frac{16}{3} a^2 = \frac{32a^2 - 16a^2}{3} = \frac{16a^2}{3}$

प्र० 25  $x(x-y) dy + y^2 dx = 0$   
 $\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2}{x(x-y)}$   $y=vx$   
 या  $\frac{dy}{dx} = \frac{d(vx)}{dx} = v \frac{dx}{dx} + x \frac{dv}{dx}$   
 $= v + x \frac{dv}{dx}$   
 $\therefore v + x \frac{dv}{dx} = \frac{v^2 x^2}{x(vx-x)} = \frac{v^2}{v-1}$   
 $x \frac{dv}{dx} = \frac{v^2}{v-1} - v = \frac{v^2 - v^2 + v}{v-1}$   
 $x \frac{dv}{dx} = \frac{v}{v-1} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{(v-1)}{v} dv$   
 $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{v-1}{v} dv \Rightarrow \log x = \int (1 - \frac{1}{v}) dv$   
 $= \log x = v - \log v + \log c$   
 $\Rightarrow \log x + \log v - \log c = v$   
 $\Rightarrow \log \left(\frac{vx}{c}\right) = v \Rightarrow e^v = \frac{vx}{c}$   
 $\Rightarrow vx = ce^v \Rightarrow \frac{y}{x} = ce^{y/x}$   
 $y = ce^{y/x}$   
 $y = c \cdot e^{(y/x)}$  Ans

प्र० 25 का अथवा एव  
 एव  $(x^2+xy) dy = (x^2+y^2) dx$   
 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{x^2+xy}$   
 $y=vx$  रखने पर  $\frac{dy}{dx} = \frac{d(vx)}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$   
 $v + x \frac{dv}{dx} = \frac{x^2 + v^2 x^2}{x^2 + xv} = \frac{x^2(1+v^2)}{x^2(1+v)}$   
 $v + x \frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{1+v}$   
 $x \frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{1+v} - v = \frac{1+v^2 - v^2 - v}{1+v}$   
 $= \frac{1-v}{1+v}$   
 $\Rightarrow \int \frac{1+v}{1-v} dv = \int \frac{dx}{x}$   
 $\Rightarrow \int (1 + \frac{2}{1-v}) dv = \log x + C$   
 $-v + 2 \log(1-v) = \log x + C$   
 $\log x + 2 \log(1-\frac{y}{x}) + \frac{y}{x} = C$   
 Ans



प्रश्न 26

दिए गए A के सत्य बोलने की प्रायिकता

$$P(A) = \frac{75}{100} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{4}$$

B के सत्य बोलने की प्रायिकता

$$P(B) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$$

A के असत्य बोलने की प्रायिकता  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$$= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

B के असत्य बोलने की प्रायिकता  $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$

$$= 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

अभीष्ट प्रायिकता

$$= P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B)$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{4}{5}$$

$$= \frac{3}{20} + \frac{4}{20} = \frac{7}{20} = \frac{7 \times 5}{20 \times 5} = \frac{35}{100} = 35\%$$

प्रश्न 26

का विषय है

यदि  $P(H) = \frac{1}{2}$

$q = [P(T)] = \frac{1}{2}$  और  $n = 6$

$P(\text{कम से कम यशस्वी}) = P(4) + P(5) + P(6)$

$$= \binom{6}{4} p^4 q^2 + \binom{6}{5} p^5 q + \binom{6}{6} p^6$$

$$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$= 15 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$= (15 + 6 + 1) \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 22 \times \frac{1}{64} = \frac{22}{64}$$

$$= \frac{11}{32} \text{ ANS}$$

~~or~~ अन्य



पत्रिका क्र. 4/1950

आदर्श उत्र (12वीं) जरीत

पृष्ठ क्र. -

उत्र मध्यमा (द्वितीय) - 832

